c)

$$\left(2\lg(n) + \sqrt{5n}\right)^3 + 4n\lg^5(n) = ?\ (5n\lg^6(n))$$

Exercice 8 (**8 points**) On considère un algorithme dont la complexité temporelle vérifie l'équation de récurrence

$T(n) = 4T\left(\lceil \frac{n}{5} \rceil\right) + f(n)$.

Déterminer le nombre **total** de nœuds (en comptant la racine et les feuilles) de l'arbre récursif de cet algorithme pour $n = 390625$. **Il ne faut pas dessiner l'arbre récursif !**

Bonjour, je suis là.

$2^0 = 1$

$2^1 = 2$

$2^2 = 4$

$2^3 = 2\cdot 2\cdot 2 = 8$

-1   :2

Exercice 5 (**10 points**)
On pose $T(n) = \sum_{i=3}^{n} 2^i(i-2)^2$ pour tout entier $n \geq 3$.

a) Calculer $T(3)$, $T(4)$ et $T(5)$.

b) Démontrer par **récurrence** que $T(n) = 2^{n+1}(n^2 - 6n + 11) - 24$ pour tout entier $n \geq 3$.

$\sum_{i=1}^{3} 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4$

$= 2 + 4 + 8 = 14$

$\sum_{i=1}^{4} 2^i = \sum_{i=1}^{3} 2^i + 2^4 = 14 + 16 = 30$

$\sum_{i=1}^{5} 2^i = \sum_{i=1}^{4} 2^i + 2^5 = 30 + 32 = 62$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}}$$

a) $T(3) = \sum_{i=3}^{3} 2^i\cdot(i-2)^2 =$

$= 2^3\cdot(3-2)^2 = 8\cdot(1)^2 = 8$

$T(4) = \sum_{i=3}^{4} 2^i\cdot(i-2)^2 =$

$= \left(\sum_{i=3}^{3} 2^i\cdot(i-2)^2\right) + 2^4\cdot(4-2)^2 =$

$= 8 + 16\cdot 2^2$

$= 8 + 16\cdot 4 = 8 + 64$

$= 72$

$T(5) = \sum_{i=3}^{5} 2^i\cdot(i-2)^2 =$

$= \sum_{i=3}^{4} 2^i(i-2)^2 + 2^5\cdot(5-2)^2$

$= 72 + 32\cdot 3^2 =$

$= \underline{\underline{360}}$

b) L'Ini

CG =

Exercice 5 (10
On pose T(n) =
a) Calculer T(3
b) Démontrer p

$+\ 64$

2

Exercice 5 (**10 points**)
On pose $T(n) = \sum_{i=3}^{n} 2^i (i-2)^2$ pour tout entier $n \geq 3$.

a) Calculer $T(3)$, $T(4)$ et $T(5)$.

b) **Démontrer par récurrence** que $\underbrace{T(n)}_{CG} = \underbrace{2^{n+1}(n^2 - 6n + 11) - 24}_{CD}$ pour tout entier $n \geq 3$. $= P(n)$

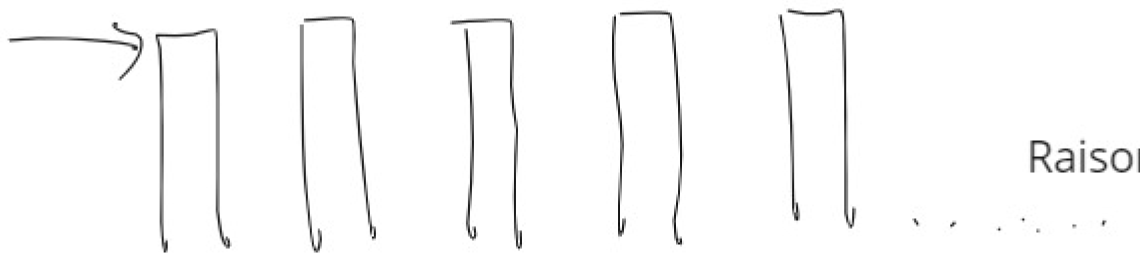
$(5-2)^2$

À montrer : $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3} : P(n)$

$2 \cdot 3^2 =$

b) L'Initialisation $n = 3$:

$$\left.\begin{aligned} CG &= T(3) = 8 \\ CD &= 2^4 \cdot (9 - 18 + 11) - 24 = \\ &= 2^4 \cdot (\ 2\ ) - 24 \\ &= 16 \cdot 2 - 24 = 32 - 24 = 8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(3) \text{ et vrai}$$



Raisonnement par récurrence

$P(n) :=$ le n'ième jeton de domino tombe par terre

Initialisation

$$P(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N} : \underbrace{P(n) \longrightarrow P(n+1)}_{\text{l'Hérédité}} \equiv \underbrace{\forall n : P(n)}_{\text{Conclusion}}$$

Hérédite : À montrer : $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ et soit $P(n)$ vrai.

ça veut dire $T(n) = \sum_{i=3}^{n} 2^i (i-2)^2 = 2^{n+1}(n^2 - 6n + 11) - 24$

À montrer : $P(n+1)$, ça veut dire

miro

À montrer : $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ et soit $P(n)$ vrai.

ça veut dire : $T(n) = \sum_{i=3}^{n} 2^i (i-2)^2 = 2^{n+1}(n^2-6n+11)-24$

À montrer : $P(n+1)$, ça veut dire

$$\underbrace{T(n+1)}_{CG} \overset{!}{=} 2^{n+2} \cdot \underbrace{((n+1)^2 - 6\cdot(n+1)+11)}_{CD} - 24$$

Exercice 5 (10 points)

On pose $T(n) = \sum_{i=3}^{n} 2^i (i-2)^2$ pour tout entier $n \geq 3$.

a) Calculer $T(3)$, $T(4)$ et $T(5)$.

b) Démontrer par **récurrence** que $T(n) = 2^{n+1}(n^2-6n+11)-24$ pour tout entier $n \geq 3$. $=: P(n)$

$$CG = T(n+1) = \sum_{i=3}^{n+1} 2^i \cdot (i-2)^2 = \underbrace{T(n)}_{\sum_{i=3}^{n} 2^i \cdot (i-2)^2} + 2^{n+1} \cdot ((n+1)-2)^2$$

$P(n)$ est vrai

$$= 2^{n+1}(n^2-6n+11) - 24 + 2^{n+1}(n-1)^2$$

$$= 2^{n+1} \cdot (n^2-6n+11+(n-1)^2) - 24$$

$$= 2^{n+1} \cdot (n^2-6n+11+n^2-2n+1) - 24$$

$$= 2^{n+1} \cdot (2n^2-8n+12) - 24$$

$$= 2^{n+1} \cdot 2 \cdot (n^2-4n+6) - 24$$

$$= 2^{n+2} \cdot (n^2-4n+6) - 24$$

$$= 2^{n+2} \cdot (n^2+2n+1-6n-6+11) - 24$$

$$= 2^{n+2}((n+1)^2 - 6(n+1)+11) - 24$$

$$\sum_{i=3}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=3}^{n} a_i\right) + a_{n+1}$$

$$\sum_{i=3}^{n+1} \underbrace{i^3}_{a_i} = \sum_{i=3}^{n} \underbrace{i^3}_{a_i} + \underbrace{(n+1)^3}_{a_{n+1}}$$

Multiplier

$$a \cdot (b+c) = ab + ac$$

Mettre a en facteur

Conclusion $\Longrightarrow \forall n \geq 3 : P(n)$

Exercice 4 (14 points) Démontrer à l'aide des définitions formelles :

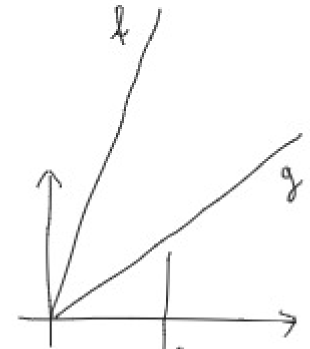
[redacted] b) $5\lg^2(2n^4) + 3\lg(4n^3) + 5 = O(\lg^2(n))$

$$\boxed{\lg(a^b) = b \cdot \lg(a)}$$

$$\lg(n^4) = 4 \cdot \lg(n)$$

$$\boxed{\lg(a \cdot b) = \lg(a) + \log(b)}$$

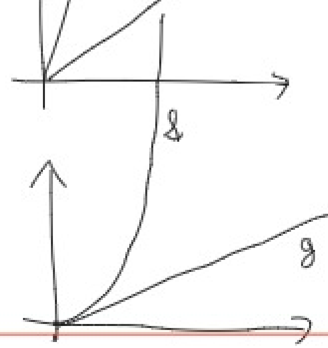
$$\lg(2 \cdot n^4) = \lg(2) + \log(n^4)$$
$$= \log(2) + 4\log(n)$$



avec $C = 2$

$f \in O(g)$ veut dire

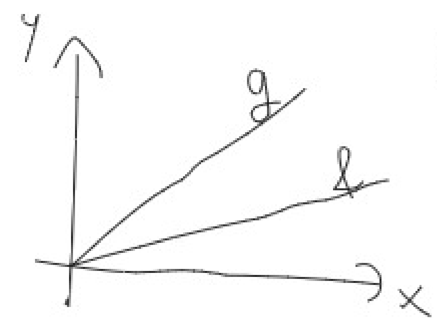
f ne croise pas beaucoup plus vite que g



$f \notin O(g)$

$$\lg^2(x) := (\lg(x))^2$$
$$\sin^2(x) := (\sin(x))^2$$
$$\tan^2(x) := (\tan(x))^2$$

$f \in O(g) \Leftrightarrow$
$\exists C > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :$
$f(n) \leq C \cdot g(n)$



avec $C = 1$

$f \in O(g)$

$f \leq 1 \cdot g$

$$5\lg^2(2n^4) + 3\lg(4n^3) + 5$$
$$= 5 \cdot (\lg(2) + 4 \cdot \lg(n))^2 + 3 \cdot (\lg(4) + 3\lg(n)) + 5$$
$$= 5 \cdot \Big(\underbrace{\lg^2(2)}_{\leq \lg^2(n)} + 8 \cdot \underbrace{\lg(2)}_{\leq \lg(n)} \cdot \lg(n) + 16\lg^2(n)\Big) + \underbrace{3\lg(4)}_{\leq \lg^2(n)} + 9\underbrace{\lg(n)}_{\leq \log^2(n)} + \underbrace{5}_{\leq \lg^2(n)}$$
$$\leq C \cdot \lg^2(n)$$

$5n^2 + n \in O(n^2)$ avec $C = C$

$$5n^2 + n \leq 5n^2 + n^2 = 6n^2$$

$7n^3 + 100n^2 + 3n + 100 \in O(n^3)$ avec $C = 210$

$$7n^3 + 100n^2 + 3n + 100 \cdot \leq 7n^3 + 100n^3 + 3n^3 + 100 \cdot n^3 = 210\, n^3$$

$\leq n^3$

$n^2 \leq n^3$ $\qquad$ $n \leq n^3$

miro